Interferenţe între Mecanică şi Geometrie

Constantin P. Niculescu*

Utilizarea ideilor din Mecanică pentru deducerea unor rezultate din Matematică are o lungă tradiţie şi poate cel mai cunoscut fapt în această direcţie este concurenţa medianelor într-un triunghi prin considerente de Statică (mai precis, de centre de greutate). Acest precept (de a valida ce se observă experimental) s-a bucurat de o mare popularitate în secolele precedente şi a condus într-adevăr la rezultate spectaculoase. Matematica zilelor noastre, deşi recunoaşte rolul intuiţiei în formularea diferitelor rezultate, validează numai acele rezultate pentru care sunt cunoscute demonstraţii riguroase. Utilizarea intuiţiei în deducerea unei demonstraţii are însă întotdeauna un farmec aparte, care face ca emoţia creaţiei matematice să fie aidoma creaţiei artistice. Problema care apare este aceea de a transpune în limbajul şi tehnicile matematicii fapte care apar foarte depărtate de aceasta, dar de care suntem încredinţaţi că sunt adevărate.

Să ilustrăm aceasta în cazul următoarelor două propoziţii:

(M) *Orice sistem de trei puncte materiale are un centru de greutate.*

(G) *În orice triunghi, medianele au un punct comun.*

Acceptând că spaţiul fizic este identic cu spaţiul geometric, atunci cele două propoziţii sunt echivalente. Acest fapt, care ne este cunoscut încă din timpul lui *Arhimede*, s-a bucurat de-a lungul timpului de o mare atenţie din partea oamenilor de ştiinţă, care l-au extins în diferite moduri, obţinând interpretări în Mecanică ale diferitelor enunţuri din Geometrie şi invers. Bineînţeles, Gazeta Matematică a fost gazda a numeroase articole pe această temă şi trebuie să notăm în primul rând contribuţia acad. *Caius Iacob*, excelent rezumată în cartea sa [7]. Motivaţia sa a fost de ordin superior, militând pentru reorientarea învăţământului matematic românesc către problemele matematicii aplicate, începând cu reintroducerea noţiunilor matematice legate de Mecanică (viteză, acceleraţie, vector, funcţie vectorială, ecuaţii diferenţiale ş.a.m.d.).

Inspiraţi de legea pârghiei, din Statică, vom indica o demonstraţie a lui (M) care valorifică ideea lui (M) $\Rightarrow$ (G). Abordarea noastră este o variantă a calculului baricentric, dar diferă de acesta printr-o mai clară evidenţiere a structurilor algebrice implicate. Menţionăm că în România calculul baricentric a avut ca promotor pe regretatul *Cezar Coşniţă* ([2], [3]). Recenta introducere a problematicii vectorilor în matematica de liceu va contribui fără doar şi poate la reconsiderarea mai vechilor rezultate pe această temă.

*Articol publicat in *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică, **XVIII** (XCVII), no. 2, 2001, pp. 63-69.

Considerăm spaţiul n- *dimensional cu ponderi*, adică produsul cartezian:

$$\mathcal{M}^n = (\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cup \{(0, 0)\},$$

care poate fi interpretat fizic ca spaţiul *punctelor materiale* $X = (x, m)$, unde x reprezintă *poziţia* punctului X, iar m reprezintă *masa* sa.

Adăugarea punctului $(0, 0)$ are raţiunea de a putea indica pe $\mathcal{M}^n$ o structură algebrică rezonabilă. Ea este generată de operaţia:

$$(x, a) \oplus (y, b) = \begin{cases} \dfrac{ax + by}{a + b}, & \text{dacă} \quad a + b \neq 0 \\ (0, 0) & \text{dacă} \quad a + b = 0 \end{cases}$$

de luare a *baricentrului* celor două puncte (x, a) şi (y, b). În interpretarea lui $\mathcal{M}^n$ ca spaţiu material, baricentrul punctelor (x, a) şi (y, b) coincide cu *centrul lor de greutate.*

Teorema 1. *$\mathcal{M}^n$ constituie un semigrup comutativ în raport cu operaţia $\oplus$.*

Demonstraţie. Verificare directă, fără probleme. Punctul $(0, 0)$ constituie elementul neutru pentru operaţia $\oplus$. QED

Teorema 1 este cunoscută în esenţa sa de foarte multă vreme, dar nu astfel exprimată. Pentru o comparaţie cu abordarea contemporană a chestiunii, cititorul poate consulta articolul [11], care reflectă fidel acel punct de vedere.

Faptul că operatia $\oplus$ este asociativă şi comutativă conduce imediat la definiţia inductivă a *baricentrului* X_G al oricarei configuraţii $\{X_1, \ldots, X_m\}$ de puncte din $\mathcal{M}^n$:

$$X_G = X_1, \quad \text{dacă} \quad m = 1$$

şi:

$$X_G = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m, \quad \text{dacă} \quad m \geq 2.$$

Existenţa baricentrului are semnificaţia unui rezultat de concurenţă a unor anumitor linii. Într-adevăr, $X_G = X_1 \oplus (X_2 \oplus \ldots \oplus X_m)$ conduce la faptul că poziţia lui X_G se află pe segmentul care uneşte poziţia lui X_1, cu poziţia baricentrului subconfiguraţiei $(X_2, \ldots, X_m)$, „opuse“ lui X_1. Prin permutări, deducem că baricentrul se află poziţionat pe toate aceste segmente. Este clar, procedând prin inducţie matematică, următorul fapt de convexitate:

Corolarul 1. *Poziţia baricentrului oricărei configuraţii $(X_1, ..., X_m)$ de puncte din spaţiul $\mathcal{M}^n$ aparţine acoperirii convexe a vârfurilor acestei configuraţii.*

Aplicaţii la concurenţa liniilor în triunghi. Fie triunghiul $\triangle$, având poziţiile vârfurilor X_A, X_B, X_C, unghiurile la vârf de mărime A, B, C şi lungimile laturilor opuse acestora respectiv a, b, c. Notăm cu p semiperimetrul triunghiului, cu r raza cercului înscris şi cu R raza cercului circumscris.

Centrul G de *de greutate* al triunghiului se defineşte ca punctul de intersecţie al medianelor. Existenţa lui G rezultă din Teorema 1, analizând baricentrul γ

al configuraţiei:

$$\{(X_A, 1), (X_B, 1), (X_C, 1)\}$$

(care din punct de vedere Static corespunde ataşării masei unitate fiecărui vârf). Baricentrul acestei configuraţii este punctul $\gamma = (G, 3)$ din $\mathcal{M}^2$ definit de relaţia:

$$(G, 3) = (X_A, 1) \oplus (X_B, 1) \oplus (X_C, 1).$$

Deoarece

$$(X_B, 1) \oplus (X_C, 1) = (M_A, 2),$$

unde M_A reprezintă mijlocul laturii $X_B X_C$, şi:

$$(X_A, 1) \oplus (X_B, 1) \oplus (X_C, 1) = (X_A, 1) \oplus ((X_B, 1) \oplus (X_C, 1)) = (X_A, 1) \oplus (M_A, 2),$$

rezultă că G este situat pe mediana din X_A a triunghiului $\triangle$, la $2/3$ de vârf şi la $1/3$ de bază.

Permutând factorii sumei ce defineşte pe γ, deducem că G se află şi pe celelalte mediane ale triunghiului.

Diferitele teoreme din Geometrie (vezi de exemplu [9]) ne permit utilizarea Teoremei 1 pentru demonstrarea (în aceeaşi manieră ca mai sus) a concurenţei a numeroase tipuri de linii remarcabile în triunghi.

Centrul I al cercului înscris este dat de baricentrul configuraţiei:

$$\{(X_A, a), (X_B, b), (X_C, c)\}.$$

Punctul K al lui *Lemoine* este dat de baricentrul configuraţiei:

$$\{(X_A, a^2), (X_B, b^2), (X_C, c^2)\}.$$

Punctul N al lui *Nagel* este dat de baricentrul configuraţiei,

$$\{(X_A, p - a), (X_B, p - b), (X_C, p - c)\}.$$

Punctul Γ al lui *Gergonne* este dat de baricentrul configuraţiei:

$$\left\{ \left(X_A, \frac{1}{p-a} \right), \left(X_B, \frac{1}{p-b} \right), \left(X_C, \frac{1}{p-c} \right) \right\}.$$

Centrul O al cercului circumscris (în cazul când triunghiul $\triangle$ este ascuţitunghic) este dat de baricentrul configuraţiei:

$$\{(X_A, \sin 2A), (X_B, \sin 2B), (X_C, \sin 2C)\}.$$

Ortocentrul H (în cazul când triunghiul $\triangle$ este ascuţitunghic) este dat de baricentrul configuraţiei:

$$\{(X_A, \mathrm{tg} A), (X_B, \mathrm{tg} B), (X_C, \mathrm{tg} C)\}.$$

Multe din observaţiile de mai sus se extind la cazul configuraţiilor din $\mathcal{M}^n$ cu modificări evidente. Spre exemplu, în cazul tetraedrelor din $\mathbb{R}^3$, centrul sferei înscrise apare ca baricentrul vârfurilor, cu mase egale cu ariile feţelor opuse. În articolul [13], următorul fapt geometric este motivat prin inexistenţa mişcării perpetue: *Nu există nici un poliedru convex al cărui baricentru să se proiecteze pe planul oricărei feţe în exteriorul acesteia.* Cititorul este invitat a deduce acest fapt din Teorema 1 de mai sus.

Principala relaţie metrică vis-à-vis de configuraţiile de puncte din $\mathcal{M}^n$ este aceea stabilită de *G. W. Leibniz* şi pusă ulterior de *J. L. Lagrange* ([8]) într-o formă mai generală şi mai avantajoasă (prin considerarea punctelor cu ponderi diferite şi exprimând ultimul termen direct în termenii configuraţiei):

Teorema 2 (Relaţia *Leibniz-Lagrange*). *Fie în $\mathcal{M}^n$ configuraţia*

$$\{(x_1, m_1), \ldots, (x_r, m_r)\},$$

având poziţia baricentrului în x_G. Atunci pentru orice punct z din spaţiul $\mathbb{R}^n$ are loc relaţia:

$$\sum_{k=1}^{r} m_k d(z, x_k)^2 \overset{(Leibniz)}{=} \left(\sum_{k=1}^{r} m_k\right) d(z, x_G)^2 + \sum_{k=1}^{r} m_k d(x_G, x_k)^2$$
$$\overset{(Lagrange)}{=} \left(\sum_{k=1}^{r} m_k\right) d(z, x_G)^2 + \frac{1}{m_1 + \ldots + m_r} \sum_{i<j} m_i m_j d(x_i, x_j)^2$$

Aici $d(u, v)$ desemnează distanţa dintre $u = (a_1, \ldots, a_n)$ şi $v = (b_1, \ldots, b_n)$ măsurată în norma euclidiană pe $\mathbb{R}^n$, adică:

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{< u - v, u - v >} = \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq n} |a_k - b_k|^2}.$$

Abordarea lui *Lagrange* este subordonată studiului dinamicii solidelor rigide şi este reluată de academicianul *Caius Iacob* într-o suită de articole din Gazeta Matematică şi apoi în cartea sa [7], unde discută legătura unor rezultate de Geometrie şi Mecanică, demonstrând prevalenţa Teoremei 2.

Teorema 2 (în forma lui *Lagrange*) este demonstrată în cazul configuraţiilor constituite din trei puncte de către *Viorel Băndilă* ([1]), care o numeşte *relaţia lui Leibniz generalizată*. Să notăm că demonstraţia sa foloseşte numai cunoştinţe de geometrie sintetică (relaţia lui *Stewart* şi teorema lui *Van Aubel*). El utilizează acest caz special pentru a detalia calculul distanţelor dintre principalele puncte remarcabile ale unui triunghi şi pentru a deduce pe această bază numeroase inegalităţi clasice; printre altele, formula lui *Leibniz* şi, respectiv, a lui *Euler*:

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$OI^2 = R(R - 2r),$$

precum şi inegalităţile ataşate lor:

$$9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2, \quad R \geq 2r,$$

inclusiv observaţia că fiecare dintre aceste inegalităţi devine egalitate numai în cazul triunghiurilor echilaterale. Aparent, *Băndilă* nu a cunoscut evoluţia istorică a Teoremei 2, dar articolul său are meritul de a sublinia, pentru publicul românesc, natura comună a unei largi suite de relaţii geometrice în triunghi.

Esenţa Teoremei 2 este aceea de generalizare *a identităţii paralelogramului.* Într-adevăr, în cazul când $r = 2$ şi z este originea spaţiului $\mathbb{R}^n$, Teorema 2 ne spune că:

$$||x_1||^2 + ||x_2||^2 = \frac{1}{2}||x_1 + x_2||^2 + \frac{1}{2}||x_1 - x_2||^2.$$

Pe de altă parte, demonstraţia Teoremei 2 se reduce la un simplu calcul algebric, exprimând pătratele distanţelor cu ajutorul produsului euclidian (tehnica standard de demonstraţie a identităţii paralelogramului); putem simplifica puţin calculul folosind invarianţa la translaţie a normei euclidiene:

$$d(u, v) = d(u - w, v - w), \ \ \forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^n$$

ceea ce ne permite să reducem raţionamentul la cazul când $z = 0$.

Bazat pe Teorema 2 are loc următorul rezultat variaţional, care în cazul configuraţiilor de trei puncte cu mase egale este cunoscut sub numele de *teorema lui Fagnano* (cf. [7], p. 154):

Corolarul 2. *Fie, în $\mathcal{M}^n$, configuraţia $\{(x_1, m_1), \ldots, (x_r, m_r)\}$, având poziţia baricentrului în x_G. Atunci pentru orice punct z din spaţiul $\mathbb{R}^n$ are loc relaţia:*

$$\inf_{z\in\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{r} m_k d(z, x_k)^2 = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_r} \sum_{i<j} m_i m_j d(x_i, x_j)^2$$

infimumul fiind atins în punctul $z = x_G$ (şi doar în acest punct).

Aceeaşi abordare conduce şi la o altă variantă a Teoremei 2, care generalizează *identitatea lui Hlawka*:

Teorema 3. *Fie, în $\mathcal{M}^n$, $(n \geq 3)$, configuraţia $\{(x_1, m_1), \ldots, (x_r, m_r)\}$. Atunci, pentru orice punct z din spaţiul $\mathbb{R}^n$, are loc relaţia*:

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^k \left[\sum_{i_1<\ldots<i_k} (m_{i_1} + \ldots + m_{i_k})^k \, d\left(z, P_{\{(x_{i_1}, m_{i_1}), \ldots, (x_{i_k}, m_{i_k})\}}\right)^2 \right] = 0.$$

Am notat cu $P_{\mathcal{P}}$ poziţia baricentrului configuraţiei $\mathcal{P}$.

Demonstraţie. Folosind invarianţa distanţei euclidiene la translaţie ne putem reduce la situaţia când $z = 0$. Mai departe, cazul $r = 3$ revine la un calcul direct, exprimând totul cu ajutorul produsului scalar. Cazul general se tratează prin inducţie. QED

În cazul când $r = 3$ şi punctele au ponderi egale cu unitatea se obţine următorul rezultat clasic:

Corolarul 3. (Identitatea lui *Hlawka* [6]). *Oricare ar fi punctele x, y, z din $\mathbb{R}^n$ are loc relaţia*:

$$||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2 - ||x + y||^2 - ||y + z||^2 - ||z + x||^2 + ||x + y + z||^2 = 0.$$

Identitatea lui *Hlawka* conduce la inegalitatea:

$$||x|| + ||y|| + ||z|| - ||x + y|| - ||y + z|| - ||z + x|| + ||x + y + z|| \geq 0$$

(cf. *H. Hornich* [6]), care a fost ulterior generalizată de binecunoscuta inegalitate a lui *T. Popoviciu* ([11], [5]) pentru funcţiile convexe.

Într-un articol recent, *T. Needham* ([10]) dă o motivaţie simplă, bazată pe centre de greutate şi pentru inegalitatea lui *Jensen*, astfel că cititorul va concluziona că există o legătură specială între diferitele rezultate din Statică şi acelea din teoria Convexităţii.

Putem să ne întrebăm în ce măsură depind rezultatele de mai sus de considerarea normei euclidiene pe $\mathbb{R}^n$. Întrucât Teorema 2 şi identitatea lui *Hlawka* implică identitatea paralelogramului, un rezultat clasic al lui *Jordan* şi *von Neumann* (vezi de exemplu [4], pp. 141-142), ne arată că orice structură de spaţiu vectorial normat pe $\mathbb{R}^n$ pentru care aceste rezultate au loc, diferă de structura euclidiană doar printr-o izometrie liniară. În schimb, ele pot fi generalizate fără probleme (utilizând calculul integral) pentru configuraţii nu neapărat discrete.

Bibliografie

[1] V. Băndilă: *O generalizare a unei relaţii a lui Leibniz şi aplicarea ei la calcularea distanţelor dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi*, Gazeta Matematică, **90** (1985), nr. 2, pp. 35-41.

[2] C. Cosnitza: *Coordonées barycentriques*, Bucarest, 1941.

[3] C. Coşniţă: *Teoreme şi probleme alese de matematică*, Editura de Stat Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1958.

[4] R. Cristescu: *Analiză funcţională*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[5] Gh. Eckstein: *O demonstraţie elementară a inegalităţii lui T. Popoviciu*, Rev. Matematică din Timişoara, **2** (XXII) (1991), p.7.

[6] H. Hornich: *Eine Ungleichung für Vektorlängen*, Math. Z. **48** (1942), 268-273.

[7] C. Iacob: *Matematică aplicată şi Mecanică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[8] J. L. Lagrange: *Sur une nouvelle proprieté du centre de gravité*, Nouveaux Mémoirs de I'Académie Royale de Berlin, 1783; vezi *Oeuvres* de Lagrange, vol. 5, pp. 535-539, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[9] T. Lalescu: *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958; Traducere după originalul în limba franceză, publicat în 1937 la Bucureşti. Reeditată la Editura Apollo, Craiova, 1993.

[10] T. Needham: *A visual explanation of Jensen's Inequality*, Amer. Math. Monthly, **100** (1993), 768-771.

[11] C. Pătrăşcoiu: *Baricentre*, Gazeta Matematică, Revistă de cultură matematică, anul **XVIII** (XCVII), nr. 1, 2000, pp.69-74.

[12] T. Popoviciu: *Sur certaines inégalités qui caractèrisent les fonctions convexes*, Analele Ştiinţifice Univ. „Al.I. Cuza", Iaşi, Secţia Mat., **11** (1965), 155-164.

[13] T. F. Tokieda: *Mechanical Ideas în Geometry*, Amer. Math. Monthly, **105** (1998), 697-703.

Universitatea din Craiova,
Facultatea de matematică – informatică,
Str. Al. I. Cuza 13, 1100 Craiova